ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1

ИЗРАЗИ

Задатак 1.1 Израчунати вредност израза:

$$\left(81^{-2^{-2}}\right):\left(81^{(-2)^{-2}}\right)$$

Решење:

Дати израз једнак је $a{:}b$, где је:

$$a=81^{-2^{-2}}=81^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}$$

$$b=\left(81\right)^{(-2)^{-2}}=81^{\frac{1}{(-2)^2}}=81^{\frac{1}{4}}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}=3$$

Одавде следи да је:

$$a:b=\frac{1}{3}:3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Задатак 1.2 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{3}:\frac{25}{111}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Решење:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{3}:\frac{25}{111}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{40}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(8\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$$

Задатак 1.3 Израчунати вредност израза:

$$\left[\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Решење:

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\right):\left(\frac{91}{7}+\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}+\frac{10}{9}\right):\frac{97}{7}=$$

$$=\frac{3\cdot 9+10\cdot 7}{63}\cdot\frac{7}{97}=\frac{97}{63}\cdot\frac{7}{97}=\frac{1}{9}$$

Следи да је дати израз једнак:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$$

Задатак 1.4 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{1+\sqrt{9+\frac{25}{16}}}{3+\frac{5}{4}}\right)^{-1}$$

Решење:

Пошто је

$$1+\sqrt{9+\frac{25}{16}}=1+\sqrt{\frac{9\cdot 16+25}{16}}=1+\sqrt{\frac{169}{16}}=1+\frac{13}{4}=\frac{17}{4},$$

$$3+\frac{5}{4}=\frac{17}{4},$$

то је дати израз једнак $\left(\frac{17}{4}:\frac{17}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{17}{4}\cdot\frac{4}{17}\right)^{-1}=1^{-1}=1$

Задатак 1.5 Израчунати вредност израза:

$$\left[\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}$$

Решење:

$$\left[\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{3}{16}:\left(\frac{24}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=$$

$$=\left[\left(\frac{3}{16}:\frac{25}{3}+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{25}+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{9}{400}+\frac{16}{400}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[2-1\right]^{-4}=1^{-4}=1$$

Задатак 1.6 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{5+4\sqrt{5}+4+5-4\sqrt{5}+4}{5-4}\right)^{-\frac{1}{2}}=18^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{18^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9\cdot 2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Задатак 1.7 Упростити израз:

$$\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right)\cdot\left(a-5+\frac{15a}{a-5}\right) \text{ ако } a\in R\setminus\{5\}$$

Решење:

Код трансформација рационалних алгебарских израза, између осталог, се користе формуле:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3, \quad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

Што се тиче самог израза, за $a\neq 5$, важи:

Нека је притом $A=\dfrac{25}{a^2+5a+25}-\dfrac{2a}{5-a}-\dfrac{a^3+25a^2}{a^3-125}$

$$\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}=\frac{25(a-5)+2a(a^2+5a+25)-(a^3+25a^2)}{(a-5)(a^2+5a+25)}=$$

$$=\frac{25a-125+2a^3+10a^2+50a-a^3-25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}=\frac{a^3-15a^2+75a-125}{(a-5)(a^2+5a+25)}=$$

$$=\frac{(a-5)^3}{(a-5)(a^2+5a+25)}=\frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25}$$

Нека је $B=a-5+\dfrac{15a}{a-5}$

$$a-5+\frac{15a}{a-5}=\frac{(a-5)^2+15a}{a-5}=\frac{a^2-10a+25+15a}{a-5}=\frac{a^2+5a+25}{a-5}$$

Па је вредност почетног израза једнака $A\cdot B$:

$$A \cdot B = \frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25} \cdot \frac{a^2+5a+25}{a-5} = a-5$$

Задатак 1.8 Упростити израз:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

Решење:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

Задатак 1.9 Упростити израз:

$$\left(\frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}\right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}, \text{ за } |a| \neq 2$$

Решење:

Нека је $A = \frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}$

$$A = \frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8} = \frac{a+1}{(a-2)(a+2)} + \frac{1-a^2}{(a+2)(a^2-2a+4)} =$$

$$= \frac{(a+1)(a^2-2a+4)+(1-a)(1+a)(a-2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} =$$

$$= \frac{(a+1)\left[a^2-2a+4+(1-a)(a-2)\right]}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \frac{(a+1)(a^2-2a+4+a-2-a^2+2a)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} =$$

$$= \frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \frac{a+1}{(a-2)(a^2-2a+4)}$$

Нека је $B=\frac{1}{(a-1)^2+3}=\frac{1}{a^2-2a+4}$

Тада је почетни израз једнак

$$A:B=\frac{a+1}{(a-2)(a^2-2a+4)}\left(a^2-2a+4\right)=\frac{a+1}{a-2}$$

Задатак 1.10 Израчнати вредност израза:

$$2^{3a}\cdot 3^{2a}$$

Решење:

$$2^{3a}\cdot 3^{2a}=\left(2^3\right)^a\cdot\left(3^2\right)^a=8^a\cdot 9^a=\left(8\cdot 9\right)^a=72^a$$

2

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика $ax^2+bx+c=0$ где су $a,b,c\in R$ и $a\neq 0$ назива се квадратном једначином. Израз $D=b^2-4ac$ је дискриминанта квадратне једначине. Ако је $D>0$ квадратна једначина има 2 реална и различита решења:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

За $D=0$ једначина има двоструко решење $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$, а за $D<0$ решења једначине су комплексни бројеви.

Задатак 2.1 Решити једначину:

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

Решење:

Једначину сведемо на облик $\dfrac{A}{B}=0 \quad \leftrightarrow \quad A=0$ и $B\neq 0$. Раставимо квадратни трином $2x^2+7x-4$ на чиниоце:

$$2x^2+7x-4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{-7\pm 9}{4}$$

Пошто су решења $x_1=-4$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, квадратни трином се може записати као:

$$2x^2+7x-4=2(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+4)(2x-1)$$

Сада добијамо:

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{(x+4)(2x-1)}-\frac{6}{2x-1}=0$$

$$\frac{2x^2+7x-4+2x(2x-1)+27-6(x+4)}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$\frac{2x^2+7x-4+4x^2-2x+27-6x-24}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$\frac{6x^2-x-1}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$6x^2-x-1=0 \quad \text{и} \quad (x+4)(2x-1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 4 \text{ и } x\neq \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{1\pm 5}{12} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \text{ и } x_2=-\frac{1}{3}$$

Међутим, због условне једначине једино решење је $x=-\frac{1}{3}$.

Задатак 2.2 Решити једначину:

$$x^2-2|x|-3=0$$

Решење:

Размотрићемо следећа два случаја:

1. У случају $x\geq 0$ једначина постаје $x^2-2x-3=0$, њена решења су:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \quad x_1=3 \text{ и } x_2=-1.$$

Због ограничења једино решење је $x = 3$.

2. У случају за $x < 0$, једначина постаје $x^2 + 2x - 3 = 0$ и њена решења су:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 1.$$

Због ограничења једино решење је $x = -3$.

Дакле, решења дате једначине су: $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

Задатак 2.3 За које вредности јединог параметра m квадратна једначина $\mathrm{x}^2 - (\mathrm{m} + 1)\mathrm{x} + 2\mathrm{m} - 1 = 0$ има двострука реална решења?

Решење:

$$x_1 = x_2 \in R \quad \leftrightarrow \quad D = 0$$

$$D = [-(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0\,, \quad m^2 - 6m + 5 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad , \quad m_1 = 1 \text{ и } m_2 = 5$$

Задатак 2.4 Решити неједначину:

$$\frac{x-4}{4x^2 - 4x - 3} > 0$$

Решење:

Дату неједначину је најлакше решити уз помоћ бројевних правих.

Одредимо нуле функције $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} \quad , \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

Сада добијамо:

$x-4$	$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$	4
$4x^2-4x-3$	$+ \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$	$-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}$
$\frac{x-4}{4x^2-4x-3}$	$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$	$-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad 4$

Па је скуп решења дате неједначине $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \cup (4,+\infty)$.

Задатак 2.5 Одредити целобројна решења неједначине:

$$x^2-4x \leq 5$$

Решење:

Дату неједначина је еквивалентна неједначини $x^2-4x-5 \leq 0$. Нуле квадратног тринома на левој старани су:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \quad , \quad x_1 = -1 \quad \text{и} \quad x_2 = 5$$

x^2-4x-5	$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$	$-1 \qquad 5$

Према томе, дата неједначина је задовољена ако и само ако $x \in [-1,5]$. Цели бројеви који припадају сегменту $[-1,5]$ су $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Задатак 2.6 Одредити реалан параметар α тако да је збир квадрата решења једначине $\mathrm{x}^2+3\alpha\mathrm{x}+\alpha^2=0$ буде $\frac{7}{4}$.

Решење:

За решавање овог задатка потребне су нам Виетове формуле. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ тада важи:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

За дату квадратну једначину добијамо:

$$x_1 + x_2 = -3\alpha, \quad x_1 \cdot x_2 = \alpha^2$$

Приметимо да се дати услов $x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$ може написати у облику $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}$ одакле се добија $9\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{7}{4}$, $\alpha^2 = \frac{1}{4}$ па су решења $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Задатак 2.7 За које је вредности реалног броја m једно решење квадратне једначине $(m-3)x^2 - (m+4)x + 3m = 0$ три пута веће од другог?

Решење:

На основу Виетових формула је $x_1 + x_2 = \frac{m+4}{m-3}$ и $x_2 \cdot x_2 = \frac{3m}{m-3}$. У задатку се захтева да буде $x_1 = 3x_2$. Добијамо:

$4x_2 = \frac{m+4}{m-3}$ и $3x_2^2 = \frac{3m}{m-3}$ следи $x_2 = \frac{m+4}{4(m-3)}$

$$3\left(\frac{m+4}{4(m-3)}\right)^2 = \frac{3m}{m-3}$$

$$3\frac{(m+4)^2}{16(m-3)^2} = \frac{3m}{m-3}$$

$$3(m^2 + 8m + 16) = 48m(m-3)$$

$$m^2 + 8m + 16 = 16m^2 - 48m$$

$$-15m^2 + 56m + 16 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-56 \pm \sqrt{4096}}{-30} = \frac{-56 \pm 64}{-30}$$

$$m_1 = -4 \quad \text{и} \quad m_2 = -\frac{4}{15}$$

Задатак 2.8 Одредити домен параметра a тако да је неједнакост $\frac{x+a}{x^2+x+1} < \frac{\mathrm{x}}{x^2+2x+3}$ тачна за свако x.

Решење:

Пошто за свако $x \in R$ важи $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 > 0$ и $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3 > 0$, после множења са $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1)(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3)$ дата неједнакост неће променити смисао. Дакле, дата неједнакост важи ако и само ако је $(\mathrm{x} + \mathrm{a})(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3) < x(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1)$ tj.:

$$(a+1)x^2 + (2a+2)x + 3a < 0$$

Последња неједнакост је тачна за свако $x \in R$ ако и само ако је $a + 1 < 0$ и $D = 4(a+1)^2 - 12a(a+1) < 0$ што је испуњено ако и само ако $a < -1$ и $\big(a \in (-\infty, -1) \cup (1/2, +\infty)\big)$ tj. $a \in (-\infty, -1)$.

Задатак 2.9 Решити у скупу реалних бројева једначину:

$$(x-2)^6 - 19(x-2)^3 = 216$$

Решење:

Сменом $t = (x-2)^3$ дата једначина се своди на квадратну $t^2 - 19t - 216 = 0$. Речења ове једначине су:

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2} \qquad t_1 = -8 \quad \text{и} \quad t_2 = 27$$

Из $(x-2)^3 = -8$ следи $x - 2 = -2$ односно $x_1 = 0$,

а из $(x-2)^3 = 27$ следи $x - 2 = 3$ односно $x_2 = 5$.

Задатак 2.10 Одредити вредности параметра m за које једначина $\mathrm{x}^2 - -(\mathrm{m}+2)\mathrm{x} + 2\mathrm{m} + 1 = 0$ има комплексне корене који задовољавају релацију: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 1$.

Решење:

Дискриминанта дате једначине је $D = [-(m+2)]^2 - 4(2m+1) = m^2 - 4m$. Решења су комплексна ако и само ако је $D < 0$, tj.:

D $\quad + + + \; - - - - \; + + + + + + +$

$\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 4$

$m \in (0,4)$ ………………………….$(*)$

Услов $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 1$ је еквивалентан услову $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leq 1$ тј.: $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} \leq 1$. Како је према Вијетовим формулама $x_1 + x_2 = m + 2$ и $x_1 x_2 = 2m + 1$, следи да је:

$$\frac{(m+2)^2 - 2(m+1)}{2m+1} \leq 1$$

односно после сређивања следи:

$$\frac{(m-1)^2}{2m+1} \leq 0$$

$(m-1)^2$ $\quad + + + + + + + + + + + + + + + +$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1$

$2m+1$ $\quad - - - - - - + + + + + + + + + +$

$\qquad\qquad -\frac{1}{2}$

$\frac{(m-1)^2}{2m+1}$ $\quad - - - - - - + + + + + + + + + +$

$\qquad\qquad -\frac{1}{2} \qquad\qquad 1$

Значи $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ ………………………….$(**)$

Из израза $(*)$ и $(**)$ следи да је $m = 1$.

3

ПОЛИНОМИ

Нека је полином $P_n(x)$ дефинисан једнакошћу: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где су $a_0, a_1, \ldots \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ реални (или комплексни) брпјеви , а x промењљива. На основу Безуове теореме остатак R при дељењу полинома $P_n(x)$ биномом $x - a$ је $P_n(a)$. Неопходан услов да несводљиви разломак $\frac{p}{q}$ $(p \in Z,\ g \in N)$ буде нула полинома $P_n(x)$ са целобројним коефицијентима је да $\frac{p}{a_n}$ (р дели a_n) и $\frac{pq}{a_0}$ (q дели a_0) .

Задатак 3.1 Одредити коефицијенте полинома:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c,\ \text{ако је}\ P_2(0) = 1,\ P_2(1) = 2,\ P_2(2) = 4$$

Решење:

Из датих услова следи:

$$P_2(0) = c = 1,\quad P_2(1) = a + b + c = 2,\qquad P_2(2) = 4a + 2b + c = 4$$

Решавањем овог система једначина добија се: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1.$

Задатак 3.2 Одредити збир свих коефицијената полинома $P(x)$ ако је:

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 1)^{2000}$$

Решење:

Збир коефицијената полинома $P(x)$ добија се као вредност полинома P за $x = 1.$ Према томе је:

$$P(1) = (1^3 + 21^2 - 1 - 1)^{2000} = 1$$

Задатак 3.3 Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = 4x^5 + 9x^3 + 19x + 90$ биномом $x + 1.$

Решење:

Према Безуовој теореми остатак дељења полиномом $P(x)$ са $x+1$ је:

$R = P(-1) = -4 - 9 - 19 + 90 = 60$

Задатак 3.4 Дат је полином $P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m$. Одредити параметар m тако да полином $P(x)$ буде дељив са $x-2$.

Решење:

На основу Безуове теореме важи да је $P(2) = 0$:

$2 \cdot 8 - 4m \cdot 4 + 2m - 2m = 0$

$16m = 16$

$m = 1$

Задатак 3.5 Дат је полином $P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m$. Одредити параметар m тако да остатак при дељењу $P(x)$ са $x-1$ буде једнак 7.

Решење:

Примењујући Безуову теорему добијамо $P(1) = 7$ да је:

$2 - 4m + m - 2m = 7$

$-5m = 5$

$m = -1$

Једначина $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ назива се алгебарском једначином степена n. Нека су $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n$ решења те једначине. Везу између коефицијената и решења те једначине дају уопштене Виетове формуле:

$x_1 + x_2 + \ldots \ldots \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ \dots\dots.. + x_{n-1} \cdot x_n = \dfrac{a_2}{a_0}$

… … ….

$x_1 x_2 \dots\dots\dots . x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}$

Задатак 3.6 Нека су x_1, x_2 и x_3 решења једначине $125x^3 - 64 = 0$. Одредити вредност израза $x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$.

Решење:

Користећи уопштене Виетове формуле добијамо:

$a_0 = 125$, $a_1 = a_2 = 0$ и $a_3 = -64$ сада је:

$x_1 + x_2 + x_3 = -125$, $x_1x_2x_3 = \frac{64}{125}$ одакле следи да је

$x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{64}{125}$.

Задатак 3.7 Једначина $x^3 + ax + b = 0$ $(a, b \in R)$ има решења $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Одредити производ свих решења те једначине.

Решење:

Из чињенице да су x_1 и x_2 решења дате једначине следи:

$1 + a + b = 0$

$8 + 2b + b = 0$

Одакле је $a = -7$ и $b = 6$. Следи да из уопштених Виетових формула добијамо: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

Задатак 3.8 Решити једначину:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x - 2 + |x-2|} = 0$$

Решење:

Како важи да је:

$$|x-2| = \{ {x-2,\ \ x \geq 2 \atop -(x-2),\ \ x<2}$$

Следи:

1. За $x<2$ добијамо:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2-(x-2)} = 0$$

Дата једначина није дефинисана.

2. За $x \geq 2$ добијамо:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2(x-2)} = 0$$

Па је ова једначина еквивалентна систему:

$$x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 \text{ и } x \neq 2$$

Решења су $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$. Међутим, због датог ограничења једина решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$.

Задатак 3.9 Ако је полином $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 + ax + b$ дељив триномом $Q(x) = (x-1)(x-2)$, одредити a и b.

Решење:

Ако је $P(x)$ дељив са $Q(x)$ онда је $P(x)$ такође дељив и са $x-1$ и са -2 . Према Безуовој теореми је $P(1) = 0$ и $(2) = 0$, одакле следи:

$$a + b = 1$$

$$2a + b = -32$$

Решење овог система је $a = -33,\ b = 34$.

Задатак 3.10 Израчунати вредност израза:

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Решење:

Степеновањем леве и десне стране једначине са 3 добија се:

$$a^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 3\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} +\right)^2 + 20 - 14\sqrt{2}$$

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)$$

Како је израз у загради једнак а, добијамо:

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20^2 - \left(14\sqrt{2}\right)^2} \cdot a$$

Односно:

$$a^3 - 6a - 40 = 0$$

Значи, a је решење последње једначине. Приметимо да су коефицијенти полинома на левој страни цели бројеви. Испитајмо да ли једначина има решења на скупу рационалних бројева. Ако је $\frac{p}{q}$ решење једначине ($p \in Z$ и $q \in N$) онда $\frac{p}{40}$ и $\frac{q}{1}$. Према томе $P \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}$ и $q = \{1\}$.
Методом покушаја тако се установљује да је $a = 4$ једино решење. Дељењем леве стране једначине са $a - 4$ добија се да је $(a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0$, како једначина $a^2 + 4a + 10 = 0$ нема реалних решења ($D = -24 < 0$), закључујемо да је $a = 4$ једино реално решење, што значи да је

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

4

АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗОВИ

Низ бројева $a_1, a_2, \dots \dots \dots .., a_n$ је аритметички низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n + d\,, \qquad (n \in N)$$

Број d називa се разлика аритметичког низа. Општи члан аритметичког низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

док се збир првих n чланова рачуна по формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d)$$

Низ бројева $a_1, a_2, \dots \dots \dots .., a_n$ је геометријски низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q\,, \qquad (n \in N) \ \text{ и } \ a_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Број q се назива количник геометријског низа. Општи члан геометријског низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

док се збир првих n чланова рачуна по формули:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

Задатак 4.1 Аритметички низ дат је својим првим чланом $a_1 = 10$ и разликом $\mathrm{d} = -5$. Одредити првих шест чланова низа.

Решење:

Користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$a_2 = a_1 + d = 5$

$a_3 = a_1 + 2d = a_2 + d = 0$

$a_4 = a_1 + 3d = -5$

$a_5 = a_1 + 4d = -10$

$a_6 = a_1 + 5d = -15$

Задатак 4.2 Наћи осми члан аритметичког низа $1, 3, 5, 7, \dots \dots$

Решење:

Обележимо са $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$. Како је $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 2$ и користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 7 \cdot 2 = 15$

Задатак 4.3 За аритметички низ са општим чланом $\boldsymbol{a_n}$ важи:

$a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и

$a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$

Израчунати први члан и разлику овог низа.

Решење:

Користећи се формулом $a_n = a_1 + (n-1)d$ препишемо дати систем једначина:

$a_1 + d \; - (a_1 + 5d \;) + a_1 + 3d + 7 = 0$

$a_1 + 7d \; - (a_1 + 6d) - 2(a_1 + 3d) = 0$

Сада следи:

$a_1 - d = -7$

$-2a_1 - 5d = 0$

Решење овог система је $a_1 = -5$ и $d = 2$.

Задатак 4.4 Дат је први члан $a_1 = 6$ и количник $q = -\frac{1}{2}$ геометријског низа. Написати првих шест чланова тог низа.

Решење:

Користећи се формулом $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ добијамо:

$a_2 = a_1 \cdot q = -3$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_2 \cdot q = \frac{3}{2}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3 = -\frac{3}{4}$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{3}{8}$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = -\frac{3}{16}$

Задатак 4.5 Дат је општи члан геометријског низа $a_n = \frac{5}{7^n}$. Одредити први члан и количник тог низа.

Решење:

Први члан геометријског низа је $a_1 = \frac{5}{7}$. Како је $a_2 = \frac{5}{7^2}$ то је:

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{5}{7^2}}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}$$

Задатак 4.6 Дат је први члан $a_1 = -1$ и количник $q = 3$ геометријског низа. Одредити индекс члана тог низа чија је вредност -81.

Решење:

Како је $a_n = -81$ и $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ имамо следећу једначину:

$$-81 = -1 \cdot 3^{n-1}$$

$$3^4 = 3^{n-1}$$

Па добијамо да је $n = 5$.

Задатак 4.7 Збир трећег и седмог члана аритметичког низа је 6, а њихов производ је 8. Израчунати збир првих шеснаест чланова те прогресије.

Решење:

Према услову задатка је:

$$a_3 + a_7 = 6$$

$$a_3 \cdot a_7 = 8$$

Односно

$$2a_1 + 8d = 6$$

$$(a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 6d) = 8$$

Из прве једначине следи да је $a_1 = 3 - 4d$ и заменом у другу добијамо:

$$(3 - 4d + 2d) \cdot (3 - 4d + 6d) = 8$$

$$(3 - 2d) \cdot (3 + 2d) = 8$$

$$9 - 4d^2 = 8$$

$$d^2 = \frac{1}{4}$$

тако да имамо два решења:

$d = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$ и

$d = -\frac{1}{2}$, $a_1 = 5$

У првом случају је:

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left(2 \cdot 1 + 15 \cdot \frac{1}{2}\right) = 76 ,$$

а у другом:

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left(2 \cdot 5 - 15 \cdot \frac{1}{2}\right) = 20 ,$$

Задатак 4.8 Израчунати збир свих парних двоцифрених бројева.

Решење:

Низ парних двоцифрених бројева је аритметички низ са првим чланом $a_1 = 10$ и разликом $= 2$. Таквих бројева има $n = \frac{98-10}{2} + 1 = 45$ па је:

$$S = S_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45 = \frac{10 + 98}{2} \cdot 45 = 2430$$

Задатак 4.9 Одредити четири узастопна члана геометријског низа ако је збир крајњих чланова једнак -49, а средњих 14.

Решење:

Из услова задатка имамо:

$a_1 + a_4 = -49$ и

$a_2 + a_3 = 14$

Односно:

$a_1(1 + q^3) = -49$

$a_1 q(1 + q) = 14$

Добијамо:

$$\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1 q(1+q)} = -\frac{49}{14}$$

тј.:

$$1-q+q^2 = -\frac{7}{2}$$

Решења ове једначине су:

$q = 2$ или $q = -\dfrac{1}{2}$

У првом случају је:

$a_1 = 7,\ a_2 = -14,\ a_3 = 28, \quad a_4 = -56$.

а у другом је:

$a_1 = -56,\ a_2 = 28,\ a_3 = -14, \quad a_4 = 7$.

Задатак 4.10 Бројеви $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ и a_3 чине геометријску прогресију. Ако је $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{a}_3 = 343$ и $\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 = 5$, одредити њихов збир.

Решење:

Из првог услова добијамо:

$(a_1 \cdot q)^3 = 343$ односно

$a_1 \cdot q = 7$

Дакле $a_2 = 7$, па из другог услова следи да је $a_1 = 2$.

Даље је $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{2}$ и $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{67}{2}$

5

ПЛАНИМЕТРИЈА И СТЕРЕОМЕТРИЈА

Задатак 5.1 Колике су странице правоугаоника чији је обим 7,4 m, а површина 3 m^2.

Решење:

Обим правоугаоника страница a и b је $O = 2(a + b)$, а површина је $P = a \cdot b$. Из услова задатка следи да је:

$$2(a + b) = 7{,}4$$

$$a \cdot b = 3$$

tj.

$$a = 3{,}7 - b$$

$$b(3{,}7 - b) = 3$$

Решимо последњу једначину:

$$-b^2 + 3{,}7b - 3 = 0$$

$$10b^2 - 37b - 30 = 0$$

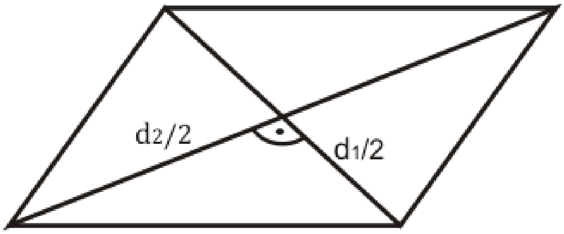
$$b_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{169}}{20} = \frac{37 \pm 13}{20}$$

$$b_1 = 2{,}5 \qquad b_2 = 1{,}2$$

У првом случају је $b = 2{,}5\,m$ и $a = 1{,}2m$, а у другом $b = 1{,}2\,m$ и $a = 2{,}5m$.

Задатак 5.2 Одредити странице ромба површине 16cm^2 чији је однос дијагонала $d_1 : d_2 = 1 : 2$.

Решење:



Како је површина ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ и из услова задатка добијамо следећи систем:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 16$$

$$d_2 = 2d_1$$

Решења овог система су $d_1 = 4\ cm$, $d_2 = 8\ cm$.

Из Питагорине теореме следи да је:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

Односно:

$$a^2 = 4 + 16$$

Сада је:

$$a = 2\sqrt{5}\ \ cm.$$

Задатак 5.3 Одредити збир унутрашњих углова многоугла код којег је збир броја страница и броја дијагонала једнак 190.

Решење:

Како је број дијагонала конвексног многоугла једнак $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ добијамо једначину:

$$n + \frac{n(n-3)}{2} = 190$$

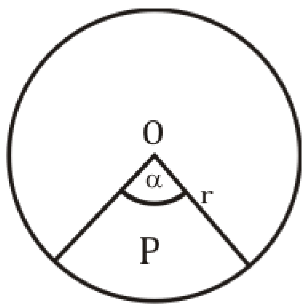
$$n^2 - n - 380 = 0$$

Једино решење које је природан број је $n = 20$, па је збир углова једнак:

$$S_n = (n-2) \cdot 180° = 3240°$$

Задатак 5.4 Одредити централни угао који одговара исечку површине $9{,}6\pi \ cm^2$ ако је полупречник круга $r = 12\ cm$.

Решење:



Како је површина кружног исечка $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$, добијамо следећу једначину:

$$9{,}6\pi = \frac{12^2 \cdot \pi\alpha}{360°}$$

Чије је решење $\alpha = 24°$.

Задатак 5.5 Одредити запремину лопте чија је површина $P = 324\pi$.

Решење:

Из формуле за површину лопте $P = 4R^2\pi$ добијамо:

$$324\pi = 4R^2\pi$$

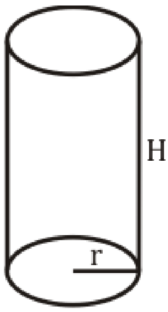
Сада је $R = 9$.

Одавде следи да је:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = 972\pi$$

Задатак 5.6 Обим основе ваљка је $12\pi\ cm$, а висина $H = 16\ cm$. Израчунати површину и запремину ваљка.

Решење:



Формуле за површину и запремину ваљка су:

$$P = 2\pi r(r + H)$$

$$V = r^2 \pi H$$

Како је основа ваљка круг имамо да је:

$$2r\pi = 12\pi$$

То значи да је

$$r = 6\ cm$$

Према томе површина ваљка је:

$$P = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6 + 16) = 264\pi\ \ cm^2$$

Односно запремина ваљка је:

$$V = r^2 \pi H = 6^2 \pi \cdot 16 = 576\pi\ \ cm^3$$

Задатак 5.7 Израчунати дужину полипречника уписане кружнице троугла ABC ако је $a = 25\ cm,\ b = 29cm$ и $c = 36\ cm$.

Решење:

Из формуле $P_{\Delta ABC} = r \cdot s$ где је:

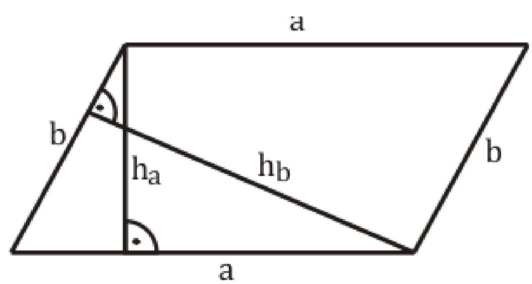
$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad \text{и} \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Добијамо да је:

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9}}{45} = 8\ \ cm$$

Задатак 5.8 Површина паралелограма страница 10cm и 12 cm је 60 cm^2 . Наћи висине овог паралелограма.

Решење:



Користећи формулу за површину паралелограма биће:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Добијамо да је:

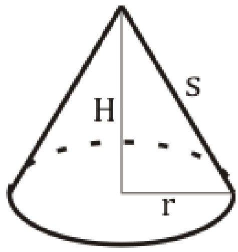
$$h_a = \frac{P}{a} = \frac{60}{10} = 6\ \ cm$$

односно

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{60}{12} = 5\ \ cm$$

Задатак 5.9 Висина H и изводница s праве купе односе се као 3:5, а њена запремина је $128\pi\ cm^3$. Одредити њену површину.

Решење:



На основу Питагорине теореме је:

$$S^2 = H^2 + r^2$$

Према услову задатка је:

$$S = \frac{5H}{3}$$

Па из ових једначина добијамо:

$$r^2 = \frac{16H^2}{9}$$

Такође је познато да је запремина купе:

$$V = 128\pi$$

Односно:

$$\frac{r^2\pi \cdot H}{3} = 128\pi$$

Сада је:

$$H = 6\ cm$$

На основу претходног следи да је:

$r = 8\ cm$ и $s = 10\ cm$

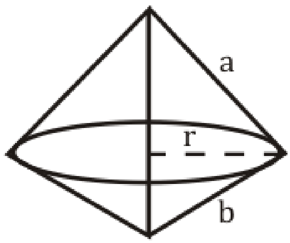
Површина купе је:

$P = r\pi(r + s) = 144\pi \quad cm^2$

Задатак 5.10 Одредити површину тела које настаје обртањем правоуглог троугла око хипотенузе ако његове катете имају дужину a и b .

Решење:

Тело које се добија приказано је на слици:



То су две купе са спојеним основама па је:

$V = V_1 + V_2$

Полупречник основе r је висина која одговара хипотенузи c , према томе:

$$r = h_c = \frac{2P}{c} = \frac{2\frac{a \cdot b}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Збир висина $H_1 + H_2$ ове две купе једнак је хипотенузи c, па имамо:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_1 + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_2 = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot (H_1 + H_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)} \cdot \pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2\pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Експоненцијалне једначине су једначине код којих се непозната налази у изложиоцу.
Нека је $a > 0, a \neq 1$. Тада

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

ако и само ако је

$$f(x) = g(x)$$

Задатак 6.1 Решити једанчину:

$$9^{-\frac{1}{x}} = 3$$

Решење:

Дата једначина је дефинисана за $x \neq 0$. Довођењем на исте основе добијамо

$$(3^2)^{-\frac{1}{x}} = 3$$

$$3^{-\frac{2}{x}} = 3^1 \rightarrow -\frac{2}{x} = 1$$

$$x = -2$$

Задатак 6.2 Решити једначину:

$$16^{\frac{1}{x}} = \sqrt{8^x}$$

Решење:

Дата једначина је дефинисана за $x \neq 0$. Довођењем на основу 2 добијамо:

$$(2^4)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{(2^3)^x}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = \sqrt{2^{3x}}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = 2^{\frac{3x}{2}} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{3x}{2}$$

$$x^2 = \frac{8}{3}$$

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Задатак 6.3 Решити једначину:

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 18$$

Решење:

Користећи особину $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ добијамо

$$2^x \cdot 3^x \cdot 3 = 18$$

$$(2 \cdot 3)^x = 6$$

$$6^x = 6^1$$

$$x = 1$$

Задатак 6.4 Решити једначину:

$$3^x \cdot 4^{x+1} = 576$$

Решење:

$$3^x \cdot 4^x \cdot 4 = 576$$

$$(3 \cdot 4)^x = \frac{576}{4}$$

$12^x = 144$

$12^x = 12^2$

$x = 2$

Задатак 6.5 Решити једначину:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

Решење:

$4^x \cdot 4 + 4^x = 320$

$4^x \cdot (4 + 1) = 320 /: 5$

$4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$x = 3$

Задатак 6.6 Решити једначину:

$$5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$$

Решење:

$5^x + 3 \cdot 5^x \cdot 5^{-2} = 140$

$5^x \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 140$

$5^x \cdot \frac{28}{25} = 140 \Big/ \cdot \frac{25}{28}$

$5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

Задатак 6.7 Решити једначину:

$$10 \cdot 2^x - 4^x = 16$$

Решење:

Уведимо смену $t = 2^x > 0$. Добијамо:

$10 \cdot t - t^2 = 16$

$t^2 - 10 \cdot t + 16 = 0$

$t_{1/2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$

$t_1 = 2, t_2 = 8$

$2^x = 2$

$x_1 = 1$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x_2 = 3$

Задатак 6.8 Решити једначину:

$$5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$$

Решење:

Уведимо смену $t = 5^x > 0$. Добијамо:

$t - 24 = \dfrac{25}{t} / \cdot t$

$t^2 - 24t + 25 = 0$

$t_{1/2} = \dfrac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{2} = \dfrac{24 \pm \sqrt{676}}{2} = \dfrac{24 \pm 26}{2}$

$t_1 = \frac{24-26}{2} = -1$ (ово решење не задовољава услов $t > 0$)

$$t_2 = \frac{24+26}{2} = 25$$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

Задатак 6.9 Решити једначину:

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$$

Решење:

Трансформацијом једначине добијамо:

$3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0 /: 2^{2x}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$$

Уведимо смену $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$

$t^2 + t - 2 = 0$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$t_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ (ово решење не задовољава услов $t > 0$)

$$t_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Задатак 6.10 Решити једначину:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

Решење:

Трансформацијом једначине добијамо:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x = 0/: 9^{2x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x = 0$$

Уведемо смену $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$

$$3 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$t_1 = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0$$

$$x = 0$$

7

ЛОГАРИТМИ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

$x = log_a b \quad \leftrightarrow \quad a^x = b \qquad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$

Основне особине логаритма су:

$a^{log_a b} = b,$ за $a > o, a \neq 1, b > 0$

$log_a xy = log_a x + log_a y,$ за $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$log_a x^s = s log_a x,$ за $a > 0, a \neq 1, x > 0, s \in R$

$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y,$ за $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$log_a 1 = 0,$ за $a > 0, a \neq 1$

$log_a a = 1,$ за $a > 0, a \neq 1$

$log_b a = \frac{1}{log_a b}$, за $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$, за $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

$log_{a^s} x = \frac{1}{s} log_a x,$ за $x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$

$log_a x = log_{a^s} x^s$, за $x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$

Задатак 7.1 Израчунати x ако је $log_3 9 = x$.

Решење:

Из дефиниције логаритма следи да је:

$3^x = 9$ односно $x = 2$.

Задатак 7.2 Израчунати x ако је $log_x 125 = 3$.

Решење:

Из дефиниције логаритма следи да је:

$x^3 = 125, \quad x = \sqrt[3]{125}\ , \quad x = 5$

Задатак 7.3 Одредити x из једначине:

$$log_2 x = log_2 a + log_2 b \qquad (a, b\ > 0)$$

Решење:

Користећи особине логаритма добијамо:

$log_2 x = log_2 ab$

$x = ab$

Задатак 7.4 Израчунати:

$$log_8 log_4 log_2 16$$

Решење:

$log_8 log_4 log_2 2^4 = log_8 log_4 4 = log_8 1 = 0$

Једначина $log_{a(x)} f(x) = log_{a(x)} g(x)$ је еквивалентна систему:

$a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$ и $f(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.

Реалан број x је решење неједначине $log_{a(x)}f(x) < log_{a(x)}g(x)$ ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

1. $a(x) > 0$ и $0 < f(x) < g(x)$.
2. $0 < a(x) < 1$ *и* $f(x) > g(x) > 0$.

Задатак 7.5 Решити једначину:

$$log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 2$$

Решење:

Дата једначина је еквивалентна систему:

$$x - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{и} \quad x - 1 > 0$$

$$x = 1 + \frac{1}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

$$x = \frac{10}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

Тако да је решење $x = \frac{10}{9}$.

Задатак 7.6 Решити неједначину:

$$log_2(3x-2) < 0$$

Решење:

Дата неједначина је еквивалентна неједначини:

$$log_2(3x-2) < log_2 1$$

А ова систему:

$$0 < 3x - 2 < 1$$

Па је решење неједначине:

$$\frac{2}{3} < x < 1$$

Задатак 7.7 Решити неједначину:

$$log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$$

Решење:

Дата неједначину напишемо у облику:

$$log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq log_{\frac{1}{5}} 1$$

Одавде добијамо:

$$0 < \frac{4x+6}{x} \leq 1$$

Значи добили смо систем од две неједначине:

$$\frac{4x+6}{x} > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{4x+6}{x} \leq 1 \qquad (2)$$

Решења једначине (1):

$$4x+6 \qquad \underset{-\frac{3}{2}}{\underline{- - - - - - + + + + + + + + + +}}$$

$$x \qquad \underset{0}{\underline{- - - - - - - - - - + + + + + + +}}$$

$$\frac{4x+6}{x} \qquad \underset{-\frac{3}{2} \qquad\qquad 0}{\underline{+ + + + + + - - - - + + + + + +}}$$

Значи $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, +\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(*)$

Решења једначине (2):

$$\frac{4x+6-x}{x} \leq 0\,,$$

$$\frac{3x+6}{x} \leq 0$$

$3x+6$ $\qquad - - - - - - + + + + + + + + + +$

$\qquad\qquad -2$

x $\qquad - - - - - - - - - - + + + + + + +$

$\qquad\qquad 0$

$\frac{3x+6}{x}$ $\qquad + + + + + + - - - - + + + + + +$

$\qquad\qquad -2 \qquad 0$

Значи $x \in [-2,0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(**)$

Из израза (*) и (**) следи да је:

$$x \in [-2, -\frac{3}{2})$$

Задатак 7.8 Решити једначину:

$$log_x 2 - log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

Решење:

Област дефинисаности је $x > 0, x \neq 1$, то јест $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$. Користећи особине логаритма трансформишемо дату једначину:

$$\frac{1}{log_2 x} - \frac{1}{2} log_2 x + \frac{7}{6} = 0$$

Уведемо смену $t = log_2 x$.

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{6} = 0$$

$$-3t^2 + 7t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-6} = \frac{-7 \pm 11}{-6}$$

$$t_1 = -\frac{2}{3}, \qquad t_2 = 3$$

Враћајући смену добијамо да су:

$log_2 x = -\frac{2}{3}$, $\qquad x_1 = 2^{-\frac{2}{3}}$ и

$log_2 x = 3$, $\qquad x_2 = 2^3 = 8$ решења.

Задатак 7.9 Решити једначину:

$$log_{16} x + log_4 x + log_2 x = 7$$

Решење:

Трансформишемо дату једначину:

$$log_{2^4} x + log_{2^2} x + log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{4} log_2 x + \frac{1}{2} log_2 x + log_2 x = 7$$

$$\frac{7}{4} log_2 x = 7$$

$$log_2 x = 4$$

Па је решење једначине:

$$x = 2^4 = 16$$

Задатак 7.10 Решити неједначину:

$$log_x 2 < 1$$

Решење:

Запишемо неједначину у облику:

$log_x 2 < log_x x$

Реалан број x је решење ове неједначине ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

(1) $\quad 0 < x < 1\,, \qquad 2 > x$

(2) $\quad x > 1\,, \qquad 2 < x$

Скуп свих решења првог система је:

$S_1 = (0,1)$

А другог је:

$S_2 = (2, +\infty)$

Према томе:

$x \in S_1 \cup S_2 = (0,1) \cup (2, +\infty)$

8

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Задатак 8.1 Доказати да је троугао са теменима A(-3,-2), B(0,-1) и C(-2,5) правоугли.

Решење:

Растојање d између тачке A(x_1,y_1) и B(x_2,y_2) рачуна се по формули :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

На основу ове формуле дужине страница троугла су:

$$|AB| = \sqrt{(0+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-0)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(-2-3)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{2}$$

Очигледно је $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, па је троугао правоугли.

Задатак 8.2 Одредити једначину праве која са осом Ox гради угао од 135^o и која садржи тачку A(-3,-2).

Решење:

Једначина праве која садржи тачку A(x_1,y_1) и има дати коефицијент правца $k = tg\alpha$ има облик:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

У овом случају коефицијент правца је $k = tg135 = -1$, па је једначина праве:

$y + 2 = -(x + 3)$, односно:

$y = -x - 5$

Задатак 8.3 Одредити координате центра и дужину полупречника кружнице $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Решење:

Једначина кружнице са центром у тачки C(p,q) и полупречником r има облик:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Како се кружница из задатка може написати у облику:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

То је центар C(2,-3) , и r=4.

Задатак 8.4 Одредити једначину елипсе чије је растојање међу жижама једнако 8, а мале полуосе је $b = 3$.

Решење:

За $a > 0$ и b> 0 једначина елипсе има облик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Растојање између жижа је 2c, па је c=4. Даље је $a^2 = b^2 + c^2 = 25$, одакле следи да је $a = 5$. Тако да је једначина тражене елипсе:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Задатак 8.5 Израчунати ексцентрицитет хиперболе чија асимптота заклапа са осом Ox угао од 60°.

Решење:

Једначина хиперболе је једначина облика:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где су $a > 0$ и $b > 0$. Праве $y = \pm\frac{b}{a}x$ су асимптоте хиперболе. Број $e = \frac{c}{a}$ назива се ексцентрицитет хиперболе, где је:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

У једначини асимптоте је:

$$k = \frac{b}{a} = tg60°$$

Па је $b = \sqrt{3}a$, одавде је екцентрицитет хиперболе:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2$$

Задатак 8.6 Одредити једначину тангенте на параболу $y^2 = 16x$ која је нормална на праву $4x + 2y + 7 = 0$.

Решење:

Једначина параболе чија је оса симетрије оса Ох је:

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$

Услов додира праве $y = kx + n$ и параболе је $p = 2kn$. Коефицијент правца дате праве $y = -2x - \frac{7}{2}$ је -2 па је коефицијент правца тангенте $k = \frac{1}{2}$. Из услова додира даље се добијају:

$$8 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n$$

$$n = 8$$

Па је једначина тангенте:

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

Задатак 8.7 Одредити параметар к тако да права $kx - 3y - 24 = 0$ буде тангента хиперболе $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Решење:

Услов додира праве $y = kx + n$ и хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ је:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

Напишимо дату праву у облику:

$$y = \frac{k}{3}x - 8$$

Одакле добијамо да је коефицијент праве $\frac{k}{3}$, а $n = -8$.

Из услова додира следи:

$$36\left(\frac{k^2}{9} - 1\right) = 64$$

Следи да је: $k = \pm 5$.

Задатак 8.8 Одредити растојање пресечне тачке правих $4x - 3y = 0$ и $y - x = 1$ од координатног почетка.

Решење:

Пресечну тачку добијамо решавањем система:

$$4x - 3y = 0$$

$$-x + y = 1$$

И то је тачка $A(3,4)$, а њено растојање од O(0,0) је $d = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Задатак 8.9 Одредити растојање тачке M(1,1) од центра круга $x^2 + y^2 -$ $-4x - 4y + 4 = 0$.

Решење:

Једначина круга може се написати у облику:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

Па је центар круга тачка C(2,2). Тражено растојање је:

$$d = |CM| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Задатак 8.10 Одредити параметре a и b, тако да праве $\boldsymbol{4x - 3y = 0}$ и $\boldsymbol{y - x = 1}$ буду тангенте елипсе $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Решење:

Услов додира праве $y = kx + n$ и елипсе $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Ако се примени услов додира у односу на сваку праву:

$$l_1: \qquad y = -\frac{1}{4}x + 25, \quad k_1 = -\frac{1}{4}, \; n_1 = \frac{25}{4}$$

$$l_2: \qquad y = -\frac{1}{9}x + \frac{25}{3}, \quad k_1 = -\frac{4}{9}, \; n_1 = \frac{25}{3}$$

Добија се систем једначина:

$$\frac{1}{16}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \quad ; \quad \frac{16}{81}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$$

Где је $a > 0$ и b> 0 . Решење система је $(a, b) = (15,5)$.

9

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ИЗРАЗИ. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Задатак 9.1 Израчунати вредност израза:

$$\sin\frac{\pi}{8}$$

Решење:

Користећи се формулом за полу углове тригонометријских функција

$$\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}$$

добијамо

$$sin\frac{\pi}{8} = sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Задатак 9.2 Израчунати вредност израза

$$\cos 36° \cdot \cos 72°$$

Решење:

Користећи се формулом $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ и проширивањем израза са $\frac{2\sin 36°}{2\sin 36°}$ добијамо

$$I = cos\,36°\cdot cos\,72°\cdot\frac{2\,sin\,36°}{2\,sin\,36°} = \frac{2\,sin\,36°\cdot cos\,36°\cdot cos\,72°}{2\cdot sin\,36°}$$
$$= \frac{sin\,72°\cdot cos\,72°}{2\cdot sin\,36°}\cdot\frac{2}{2} = \frac{sin(2\cdot 72°)}{4\cdot sin\,36°} = \frac{sin\,144°}{4\cdot sin\,36°}$$

Користећи се са $\sin 144° = \sin(180° - 36°) = \sin 36°$ добијамо да је:

$$I = \frac{sin\, 36°}{4 \cdot sin\, 36°} = \frac{1}{4}$$

Задатак 9.3 Израчунати:

$$\sin 3000°$$

Решење:

Знајући да је период функције $\sin x$ једнак $T = 360°$ добијамо

$$sin\, 3000° = sin(120° + 8 \cdot 360°) = sin\, 120° = sin(90° + 30°) = cos\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

јер је $sin(90° + \alpha) = cos\, \alpha.$

Задатак 9.4 Ако је $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$, израчунати $\tan \alpha$.

Решење:

Користећи се формулом

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\, \alpha - tan\, \beta}{1 + tan\, \alpha \cdot tan\, \beta}$$

и чињеницом да је $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, следи

$$tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{tan\, \alpha - tan\frac{\pi}{4}}{1 + tan\, \alpha \cdot tan\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{tan\, \alpha - 1}{1 + tan\, \alpha} = \frac{3}{4} / \cdot 4 \cdot (1 + tan\, \alpha)$$

$$4\, tan\, \alpha - 4 = 3 + 3\, tan\, \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad tan\, \alpha = 7$$

Задатак 9.5 Ако је $\sin 1994° = a, \tan 1994° = b, \operatorname{ctg} 1994° = c$. Одредити $max(a, b, c)$ и $min(a, b, c)$.

Решење:

На основу периодичности тригонометријских функција је

$$a = \sin 1994° = \sin(194° + 5 \cdot 360°) = \sin 194° = \sin(180° + 14°) \\ = -\sin 14°$$

$$b = \tan 1994° = \tan(14° + 11 \cdot 180°) = \tan 14°$$

$$c = \operatorname{ctg} 1994° = \operatorname{ctg}(14° + 11 \cdot 180°) = \operatorname{ctg} 14°$$

Очигледно је $min(a, b, c) = a$.

Како је $0 < b < 1$ следи да је $\operatorname{ctg} 14° = c = \frac{1}{b} > 1$.

Према томе је $max(a, b, c) = c$.

Задатак 9.6 Решити једначину

$$2\sin^2 x = 1$$

Решење:

Користећи се идентитетом $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, добија се:

$$1 - \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 0$$

па је $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

односно $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in Z)$.

Задатак 9.7 Решити једначину:

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Решење:

Уведимо смену $t = \sin x, (-1 < t < 1)$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Како је $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \qquad (k \in Z)$$

$$\sin x = -1$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ (n \in Z).$$

Задатак 9.8 Решити једначину

$$2\sin^2 x - \cos x = 1$$

Решење:

Користећи идентитет $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, дата једначина се трансформише

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 1$$

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

Смена $t = \cos x$, $(-1 < t < 1)$

$-2t^2 - t + 1 = 0 / \cdot (-1)$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

$$t_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Значи, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

Како је $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ то је

$x_{1/2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

и

$x = \pi + 2n\pi, \qquad (n \in Z)$

Задатак 9.9 Решити једначину

$$2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Решење:

Како $\cos x = 0$ не може бити решење дате једначине, поделимо је је са $\cos^2 x$

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0$

Смена $t = \tan x$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}$$

за $\tan x = 1 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in Z)$

за $\tan x = \frac{3}{2} \rightarrow x_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2} + n\pi, \quad (n \in Z)$

Задатак 9.10 Решити једначину:

$$\sin 6x - \sin 4x = 0$$

Решење:

Користећи се идентитетом $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, добијамо

$$2 \cdot \cos\frac{6x + 4x}{2} \cdot \sin\frac{6x - 4x}{2} = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos 5x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, (k \in Z)$$

$\sin x = 0 \quad \rightarrow \quad x = n\pi, (n \in Z)$

10

ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈЕ У ПЛАНИМЕТРИЈИ

Задатак 10.1 Ако у ΔABC важи $\alpha = 2\beta$ и $b = 2, c = 3$, израчунати страницу a.

Решење:

Применом синусне теореме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, добија се $\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ одакле следи да је

$$\frac{a}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{4}$$

На основу косинусне теореме $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta$ следи

$$4 = a^2 + 9 - 2 \cdot a \cdot 3 \cdot \frac{a}{4}$$

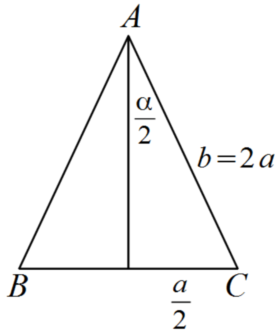
Одавде се добија да је $a = \sqrt{10}$

Задатак 10.2 У једнакокраком троуглу крак је два пута већи од основице. Ако је α угао између кракова, израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Решење:

Висина која одговара основици a је симетрала угла који образују краци, те је

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$



Задатак 10.3 Ако је у $\Delta ABC, \alpha = 30°, a = \sqrt{2}, b = 2$ израчунати угао β.

Решење:

Применом синусне теореме добија се

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°} = \frac{2}{\sin\beta}$$

Па је $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле следи да постоје два решења $\beta_1 = 45°$ или $\beta_2 = 135°$.

Задатак 10.4 Ако у ΔABC, површине $P = 6\sqrt{3}$, странице $a = 3$ и $b = 7$ заклапају туп угао, одредити трећу страницу.

Решење:

Како је површина троугла

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

Следи да је

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Даље је

$$\cos\gamma = -\sqrt{1-\sin^2\gamma} = -\sqrt{1-\frac{48}{49}} = -\frac{1}{7}$$

Према косинусној теореми је

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

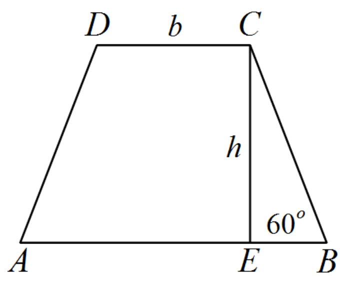
$$c^2 = 9 + 49 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$c^2 = 64$$

$$c = 8$$

Задатак 10.5 У трапезу $ABCD$ је $AB = 9, AD = BC = 4, < ABC = 60°$ израчунати површину трапеза.

Решење:



Нека је $CE = h$ висина трапеза. У правоуглом троуглу BEC је $\sin 60° = \frac{|CE|}{|BC|}$ па је $h = |CE| = 2\sqrt{3}$.

Такође је $\cos 60° = \frac{|BE|}{|BC|}$, одакле следи да је $|BE| = 2$. Како је трапез једнакокрак, па је

$b = |CD| = |AB| - 2|BE| = 5.$

Сада је

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{9+5}{2} = 7$$

па је површина трапеза $P = m \cdot h = 14\sqrt{3}$.

Задатак 10.6 У троуглу ΔABC је $\alpha = 30°, a = \sqrt{2}, b = 2$. Одредити остале углове троугла.

Решење:

Из синусне теореме је

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

одакле следи да је

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30°$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

па је

$\beta_1 = 45°$ $\qquad\qquad$ $\beta_2 = 135°$

$\gamma_1 = 105°$ $\qquad\qquad$ $\gamma_2 = 15°$

Задатак 10.7 У троуглу ABC дато је $\alpha = 45°, \beta = 60°$ и полупречник описаног круга $R = 2\sqrt{6}$. Одредити остале основне елементе без употребе таблица.

Решење:

Најпре ћемо наћи угао γ:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - (45° + 60°)$$

$$\gamma = 75°$$

Искористићемо синусну теорему

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow a = 2R\sin\alpha$$

$$a = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 45°$$

$$a = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \rightarrow b = 2R\sin\beta$$

$$b = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 60°$$

$$b = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

$$b = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \rightarrow c = 2R\sin\gamma$$

$$c = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 75°$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \sin(45° + 30°)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot (\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

Задатак 10.8 Одредити страницу b троугла ABC ако су његове странице $a = 2\sqrt{3}\ cm, c = \sqrt{6}\ cm$ и угао $\beta = 105°$.

Решење:

Овде ћемо употребити косинусну теорему

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Одредимо $\cos 105°$

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}$$

$$b^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 + 6\sqrt{3}$$

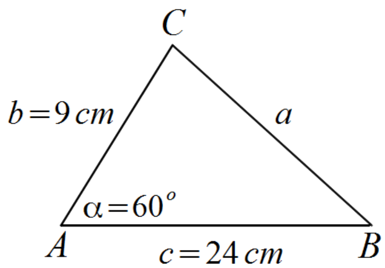
$$b^2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$b^2 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

$b = 3 + \sqrt{3}$

Задатак 10.9 У троуглу ABC дато је $AB = 24\ cm, AC = 9\ cm$ и угао $\alpha = 60°$. Одредити без употребе таблица, страницу BC и полупречник описане кружнице.

Решење:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = 9^2 + 24^2 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \cos 60°$

$a^2 = 81 + 576 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 = 441$

$a = \sqrt{441}$

$a = 21\ cm$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow \frac{21}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$$2R = \frac{42}{\sqrt{3}}$$

$R = \frac{21}{\sqrt{3}}$ рационалишемо

$$R = \frac{21}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{21\sqrt{3}}{3}$$

$$R = 7\sqrt{3}\ cm$$

Задатак 10.10 У троуглу ABC разлика страница a и b једнака је 3 cm, угао $\gamma = 60°$ и полупречник описане кружнице $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\ cm$. Одредити странице троугла ABC.

Решење:

Како је

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \rightarrow c = 2R\sin\gamma$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60°$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = 7\ cm$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60°$$

$$49 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\frac{1}{2}$$

$$49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$b_1 = 5$$

$b_2 = -8$ (ово није решење јер не може дужина странице да буде негативан број)

Дакле $b = 5$

$$a = b + 3$$

$$a = 5 + 3$$

$$a = 8\ cm$$

САДРЖАЈ